ECOLE SUPERIEURE DE GESTION

CONCOURS D'ENTREE 1991

CONCOURS FORMULES ECONOMIQUE ET TECHNOLOGIQUE

EPREUVE DE MATHEMATIQUES I

DUREE : 4 HEURES COEFFICIENT : 3

LUNDI 29 AVRIL DE 14 H 30 A 18 H 30

EXERCICE I (4 points)

Soit E l'ensemble des applications de f $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ vérifiant les conditions suivantes

$\forall t \in]-\infty\ 0[\ f(t)=0$ et $\forall t \in [0\ +\infty[\ f(t) \geq 0$

f continue sur $]-\infty\ 0[$ et f continue sur $[0\ +\infty[$

$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt = 1$

1. Soit λ un réel strictement positif et soit f la fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telle que :

$\forall t \in]-\infty\ 0[\ f(t)=0$ et $\forall t \in [0\ +\infty[\ f(t) = \lambda e^{-\lambda t}$

a - Montrer que f appartient à E

b - Etudier les variations de f

2. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $0 < \alpha < \lambda$

Soit g la fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telle que $\forall t \in]-\infty\ 0[\ g(t)=0$ et

$\forall t \in [0\ +\infty[\ g(t) = \alpha e^{-\alpha t}$

Soit $t_1 > 0$ tel que $f(t_1) = g(t_1)$ et soit $t_2 > t_1$

Comparer les nombres

$\int_0^{t_1} f(t)dt$ et $\int_0^{t_1} g(t)dt$ puis $\int_{t_1}^{t_2} f(t)dt$ et $\int_{t_1}^{t_2} g(t)dt$

3. Représenter dans un même repère les graphes des fonctions f et g lorsque $\lambda = 2e$ et $\alpha = \frac{1}{2}e$

A SUIVRE

EXERCICE II (8 points)

A) Soit λ un réel $\lambda > 0$. Soit X une variable aléatoire réelle absolument continue admettant comme densité de probabilité la fonction f définie par :

$\forall t \in]-\infty\ 0[\ f(t) = 0$ et $\forall t \in [0\ +\infty[\ f(t) = \lambda e^{-\lambda t}$

Déterminer la fonction de répartition de X
Calculer l'espérance mathématique et la variance de X

Rappel : Une telle variable aléatoire X suit une loi exponentielle de paramètre λ

B) Une firme vend des appareils électriques. On admet que la durée de bon fonctionnement de chacun de ces appareils exprimée en mois est une variable aléatoire X qui suit une loi exponentielle de paramètre λ . On suppose que chacun de ces appareils a une probabilité p = 0,02 de tomber en panne pendant les six premiers mois de son utilisation.

1. Déterminer le paramètre λ de la loi de X : on donne logarithme nepérien de 0,98 = - 0,02

2. Calculer la probabilité de l'événement $X \geqslant 8$ sachant $X \geqslant 2$

3. Cette firme a vendu N appareils. Soit Y la variable aléatoire égale au nombre d'appareils qui tombent en panne pendant les six premiers mois de leur utilisation, déterminer la loi de la probabilité de Y et calculer l'espérance mathématique et la variance de Y

4. On suppose N = 100. En utilisant une approximation de Y par une loi de Poisson calculer la probabilité de l' événement (Y=4) puis de (Y > 4)

5. La firme envisage de vendre ces appareils avec une garantie de six mois et pour cela majore de 20 F le prix de chaque appareil. En revanche, elle assume durant cette période de garantie les réparations (toujours de même nature) qui lui coûtent 500 F par réparation.

La majoration du prix de vente par appareil suffit-elle à couvrir avec une probabilité supérieure ou égale à 0,90 les frais de réparations entraînés par cette politique de vente dans le cas où

a) N = 100 ?
b) N = 200 ?

On donne $\sum_{k=0}^{k=7} e^{-4} \frac{4^k}{k!} = 0,9489$

Tournez la page S.V.P.

EXERCICE III (8 points)

Soit $\mathcal{M}$ l'ensemble des matrices carrées d'ordre 2 à coefficients réels

I . Soit $A \in \mathcal{M}$ on pose $A = (a_{ij})$

a_{ij} désigne le terme de la matrice situé à la ième ligne et jième colonne

Soit f l'application de $\mathcal{M}$ dans $\mathbb{R}$ telle que : $\sum_{i=1}^{i=2}$

$\forall A \in \mathcal{M}\ f : A = (a_{ij}) \longrightarrow f(A) = \sum_{i=1}^{i=2} a_{ii}$

1. Montrer que f est linéaire et que $\forall A \in \mathcal{M}$, $\forall B \in \mathcal{M}\ f(A \times B) = f(B \times A)$

2. Soit $E = \{ A \in \mathcal{M}$ telles que $f(A) = 0\}$

Montrer que E est un sous espace vectoriel de $\mathcal{M}$

3. Déterminer 3 matrices J, K, L appartenant à $\mathcal{M}$ telles que (J, K, L) constituent une base de E

4. Montrer que si A et B sont deux matrices de $\mathcal{M}$ semblables alors f(A) = f(B)

II. Soit F l'ensemble des matrices de $\mathcal{M}$ de la forme

$$\begin{pmatrix} a & c \\ 1-a & 1-c \end{pmatrix}$$ telles que $0 < a < 1$ et $0 < c < 1$

Soit $A \in F$

on pose $A = \begin{pmatrix} a & c \\ 1-a & 1-c \end{pmatrix}$ et soit $P = \begin{pmatrix} 1 & c \\ -1 & 1-a \end{pmatrix}$

1. Calculer $P^{-1} \times A \times P$

2. En déduire que $\forall m \in \mathbb{N}^* \quad A^m \in F$

3. On pose $\forall m \in \mathbb{N}^* \quad A^m = \begin{pmatrix} u_m & w_m \\ v_m & z_m \end{pmatrix}$

a) Déterminer les limites des suites (u_m) (v_m) (w_m) (z_m)

b) Soient u, v, w , z les limites respectives de ces quatre suites

Montrer que la matrice $\begin{pmatrix} u & w \\ v & z \end{pmatrix}$ est un élément de F

FIN